УДК 624.04

Човнюк Ю. В., Діктерук М. Г., Почка К. І.

ВИКОРИСТАННЯ ЧАСОВОЇ СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ ВДОСКОНАЛЕННЯ ЯКОСТІ РУХУ ТА ПІДВИЩЕННЯ ЙОГО ТОЧНОСТІ У ЗАДАЧАХ ПОЗИЦІОНУВАННЯ РОБОЧИХ ОРГАНІВ БУДІВЕЛЬНОЇ (РОБОТО-) ТЕХНІКИ

Постановка проблеми. Сучасна будівельна (робото-) техніка для оператора є складним об'єктом управління. Складність визначається необхідністю точного переміщення вантажу, що закріплений на гнучкому підвісі (наприклад, портальні крани). Для гасіння коливань і скорочення тривалості робочого циклу необхідно керувати переміщенням вантажу (крани) чи робочого органу (будівельні машини, екскаватори, бульдозери тощо) одночасно за кількома координатами шляхом реалізації складних алгоритмів за високого степеня координації рухів оператора. Задача керування будівельною (робото-) технікою (зокрема, задача позиціонування вантажу чи робочого органу машини) при заданих початкових і кінцевих координатах вантажу/робочого органу машини і виконання необхідних обмежень на кінематичні та силові параметри машини, її рух може бути вирішений за допомогою різноманітних алгоритмів (у тому числі за допомогою сучасних мехатронних систем управління). Оптимальним (відсутні коливання принаймні у кінцевій точці руху вантажу/робочого органу машини) можна вважати такий алгоритм, який забезпечує за інших однакових умов мінімальну тривалість циклу і достатньо простий для реалізації оператором, не викликаючи у останнього зайвої напруженості у роботі, чи використовуваною системою керування (автоматизованою – з елементами мехатроніки). Як показують дослідження, точно визначити оптимальні алгоритми керування практично можна для кожного з механізмів окремо. При переході до задачі одночасного переміщення вантажу (робочого органу машини) за кількома координатами визначення алгоритму настільки ускладнюється, що необхідно застосовувати наближені методи його пошуку за допомогою сучасних аналітичних методів та ресурсів обчислювальної техніки. Алгоритм такого керування залежить від параметрів будівельної (робото-) техніки, співвідношення початкових і кінцевих координат вантажу (робочого органу машини). На думку авторів даного дослідження, вказані алгоритми можна відшукати при аналізі позиціонування вантажу (робочого органу) у межах одномасової моделі з одним ступенем вільності руху.

Аналіз публікацій по темі дослідження. Математичний опис об'єктів автоматизації, оптимальне керування ними, а також моделі та системні методи розрахунку вантажопідйомної техніки (кранів) та інших будівельних машин розглянуті і детально досліджені у роботах [1–5]. Результати вказаних робіт будуть використані у даному дослідженні.

Мета даної роботи полягає у вдосконаленні критеріїв якості руху та підвищенні його точності у задачах позиціонування робочих органів будівельної (робото-) техніки в межах моделей дискретного типу (одномасових) з одним ступенем вільності руху. Для досягнення мети роботи використаний підхід, розвинутий у [6].

Виклад основного матеріалу дослідження.

Відомо [6], що при дії на масу (робочого органу) M сили, яка змінюється у часі за законом $P = f(t)$, система буде здійснювати вимушені коливання. У такому разі переміщення маси M у момент часу t (якщо до моменту прикладання вказаної сили система не здійснювала вільні коливання) буде визначатись виразом:

$$y = \frac{1}{\omega \cdot M} \cdot \int_0^t f(t_1) \cdot \sin[\omega \cdot (t - t_1)]\, dt_1 , \qquad (1)$$

де ω – кругова частота коливань системи. Остання визначається з виразу:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{M}}, \tag{2}$$

де c – жорсткість системи.

Використовуючи результати роботи [6] та уникаючи наявних у цитованому дослідженні помилок, можна показати, що у випадку дії вимушеної сили, закон зміни якої заданий у вигляді:

$$P = f(t) = P_0 + P_0' \cdot \frac{t}{1!} + P_0'' \cdot \frac{t^2}{2!} + P_0''' \cdot \frac{t^3}{3!} + P_0^{(IV)} \cdot \frac{t^4}{4!} + \ \dots \ + P_0^{(n)} \cdot \frac{t^n}{n!}, \tag{3}$$

переміщення системи з одним ступенем вільності руху може бути записане у вигляді:

$$y = \frac{P_0}{M} \cdot \left(\frac{1 - \cos \omega \cdot t}{\omega^2} \right) + \frac{P_0'}{M} \cdot \left(\frac{\omega \cdot t + \sin \omega \cdot t}{\omega^3} \right) + \frac{P_0''}{M} \cdot \left(\frac{1 - \cos \omega \cdot t + 0{,}5 \cdot \omega^2 \cdot t^2}{\omega^4} \right) +$$

$$+ \frac{P_0'''}{M} \cdot \left(\frac{{}^1\!/_6 \cdot \omega^3 \cdot t^3 + \omega \cdot t + \sin \omega \cdot t}{\omega^4} \right) + \frac{P_0^{(IV)}}{M} \cdot \left(\frac{{}^1\!/_{24} \cdot \omega^4 \cdot t^4 + 0{,}5 \cdot \omega^2 \cdot t^2 + 1 - \cos \omega \cdot t}{\omega^6} \right) + \tag{4}$$

$$+ \ \dots \ + \frac{P_0^{(n)}}{M} \cdot \int_0^{t(n)} \left\{ \frac{1 - \cos \omega \cdot t}{\omega^2} \right\} (dt)^n ,$$

де умовно позначено: $\int_0^{t(n)} \left\{ \frac{1 - \cos \omega \cdot t}{\omega^2} \right\} (dt)^n$ – n-кратний визначений інтеграл від нуля до t від функції $A_t = \frac{(1 - \cos \omega \cdot t)}{\omega^2}$.

(Для доведення справедливості формули (4) слід вихідну функцію $y(t)$ так само, як і силу P, розкласти у ряд Маклорена).

Розглянемо у подальшому ситуацію, коли $n = 4$. На рис. 1 подано графік залежності $y(t)$ для цього випадку. Видно, що з плином часу t внесок від коливань $\sim (\sin \omega \cdot t, \cos \omega \cdot t)$ системи зменшується, але саме цей доданок зменшує точність позиціонування (робочого органу машини) у кінцевій точці траєкторії руху.

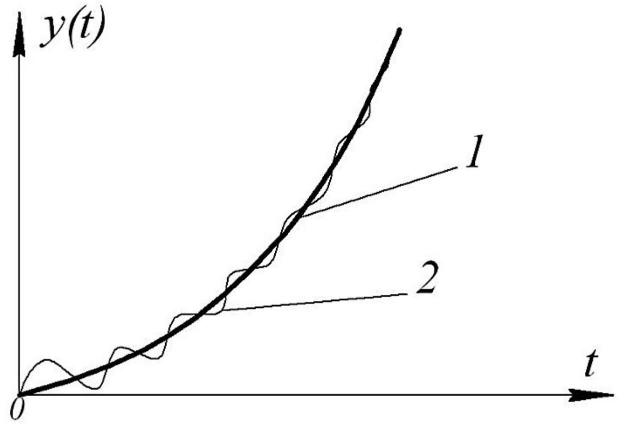

Рис. 1. Залежність $y(t)$ для $n = 4$:
1 – коливання відсутні; 2 – за наявних коливань

Визначимо умови, за яких внесок від коливань у значення переміщення $y(t)$ відсутній (хоча б у кінцевій точці траєкторії $y_K = y(t)\big|_{t=t_K}$).

Оскільки в усі вирази для складових $y(t)$ (4) входять множники: $(1-\cos\omega\cdot t)$ або $\sin\omega\cdot t$, можна записати перший із вказаних виразів у вигляді: $(1-\cos\omega\cdot t)=2\cdot\sin^2\left(\frac{\omega\cdot t}{2}\right)$, а другий – $\sin\omega\cdot t=2\cdot\sin\left(\frac{\omega\cdot t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega\cdot t}{2}\right)$. Обидва із вказаних множників при такому записі мають у своєму складі співмножник $\sin\left(\frac{\omega\cdot t}{2}\right)$. Умови, за яких цей множник дорівнює нулю у кінцевій точці траєкторії (при $t=t_K$, де t_K – час руху у кінцеву точку траєкторії), мають вид:

$$\frac{\omega\cdot t_K}{2}=\pi\cdot m, \qquad m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \tag{5}$$

З виразу (5) легко отримати:

$$t_K=\frac{2\cdot\pi\cdot m}{\omega}. \tag{6}$$

Отже, при плануванні траєкторії руху робочого органу будівельної (робото-) техніки слід обирати такі траєкторії руху, у яких сила вимушеної дії на масу M робочого органу має вид (4), а тривалість руху до кінцевої точки траєкторії виражається формулою (6). За виконання цих двох умов принаймні у кінцевій точці траєкторії руху робочого органу будуть відсутні коливання, спричинені наявністю у (4) членів, що пропорційні $\sin\omega\cdot t$ та $\cos\omega\cdot t$.

Зокрема, для $n=4$, y_K має вигляд:

$$y_K=y(t)\big|_{t=t_K}=\frac{P_0'}{M}\cdot\frac{t_K}{\omega^2}+\frac{P_0''}{M}\cdot\frac{0{,}5\cdot t_K^2}{\omega^2}+\frac{P_0'''}{M}\cdot\frac{\left({}^1\!/_6\cdot\omega^3\cdot t_K^3+\omega\cdot t_K\right)}{\omega^4}+ \\ +\frac{P_0^{(IV)}}{M}\cdot\frac{\left({}^1\!/_{24}\cdot\omega^4\cdot t_K^4+0{,}5\cdot\omega^2\cdot t_K^2\right)}{\omega^6}. \tag{7}$$

Враховуючи ту обставину, що $\omega=\frac{2\cdot\pi}{T}$, де T – період коливань (власних/вимушених) системи, тоді маємо:

$$t_K=m\cdot T, \qquad m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \tag{8}$$

Слід зазначити, що при резонансі ("найгірший" випадок, коли $\omega_{вим}=\omega_{власн}=\omega$, де $\omega_{вим}$ – кругова частота вимушених коливань, а $\omega_{власн}$ кругова частота власних коливань) періоди власних і вимушених коливань системи співпадають. При цьому не враховані дисипативні процеси, завжди наявні у реальній механічній системі.

За наявних у системі малих сил затухання, що пропорційні першому степеню швидкості руху замість T слід у (8) використовувати T_1:

$$T_1=\frac{2\cdot\pi}{\omega_1}=\frac{2\cdot\pi}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}}, \qquad \varepsilon=\frac{\alpha}{2\cdot M}, \tag{9}$$

де α – коефіцієнт опору, ${}^{кг}\!/_{с}$.

При дії на механічну систему швидкоплинної сили з імпульсом сили (τ – тривалість такої сили):

$$S = \int_0^{\tau} P(t)\, dt\,, \tag{10}$$

де $\tau << T$ (або T_1), найбільше переміщення, що матиме система (це буде після зникнення такої сили), виражається формулою:

$$y_{\max} = \frac{S}{\omega \cdot M}\,, \tag{11}$$

або з відповідною заміною $\left(T \to T_1,\ \omega \to \omega_1\right)$ у (11).

Цьому переміщенню відповідає еквівалентна статична сила:

$$P_{екв} = S \cdot \omega\,, \tag{12}$$

або з відповідною заміною $\left(T \to T_1,\ \omega \to \omega_1\right)$ у (12).

При $n = 4$ з (3) маємо:

$$P(t) = f(t) = P_0 + P_0' \cdot \frac{t}{1!} + P_0'' \cdot \frac{t^2}{2!} + P_0''' \cdot \frac{t^3}{3!} + P_0^{(IV)} \cdot \frac{t^4}{4!}, \tag{13}$$

тоді для S отримаємо:

$$S = P_0 \cdot \tau + P_0' \cdot \frac{\tau^2}{2!} + P_0'' \cdot \frac{\tau^3}{3!} + P_0''' \cdot \frac{\tau^4}{4!} + P_0^{(IV)} \cdot \frac{\tau^5}{5!}\,. \tag{14}$$

Прирівнюючи між собою вирази (11) та (7) з урахуванням (14), маємо найбільш загальне рівняння для визначення параметру траєкторії руху системи $t_к$ за заданих: закону $P(t)$, τ, ω (або ω_1), $n = 4$:

$$\begin{aligned} &P_0 \cdot \tau + P_0' \cdot \frac{\tau^2}{2!} + P_0'' \cdot \frac{\tau^3}{3!} + P_0''' \cdot \frac{\tau^4}{4!} + P_0^{(IV)} \cdot \frac{\tau^5}{5!} = \\ &= \frac{P_0' \cdot t_к}{\omega} + \frac{P_0'' \cdot 0{,}5 \cdot t_к^2}{\omega} + \frac{P_0''' \cdot \left(1/6 \cdot \omega^3 \cdot t_к^3 + \omega \cdot t_к \right)}{\omega^4} + \frac{P_0^{(IV)} \cdot \left(1/24 \cdot \omega^4 \cdot t_к^4 + 0{,}5 \cdot \omega^2 \cdot t_к^2 \right)}{\omega^5}. \end{aligned} \tag{15}$$

Значення $t_к$ з (15) легко знайти за відомою формулою Феррарі, оскільки дане рівняння відносно невідомої $t_к$ є рівнянням четвертого порядку.

Для деяких частинних випадків, наведених нижче, можна використати більш прості формули:

а) $\{P_0,\ P_0'\} \neq 0$,

$$P_0'' = P_0''' = P_0^{(IV)} = 0 - t_к = \frac{\omega}{P_0'} \cdot \left(P_0 \cdot \tau + P_0' \cdot \frac{\tau^2}{2!} \right); \tag{16}$$

б) $P_0'' \neq 0$,

$$P_0 = P_0' = P_0''' = P_0^{(IV)} = 0 - t_к = \sqrt{\frac{\omega \cdot \tau^3}{3}}\;; \tag{17}$$

в) $P_0''' \neq 0$,

$$P_0 = P_0' = P_0'' = P_0^{(IV)} = 0 - \frac{\omega^4 \cdot \tau^4}{24} = \frac{1}{6} \cdot \omega^3 \cdot t_к^3 + \omega \cdot t_к\,, \tag{18}$$

де для знаходження $t_к$ треба використати формулу Кардано (оскільки рівняння (18) є кубічним відносно невідомої $t_к$);

г) $P_0^{(IV)} \neq 0$,

$$P_0 = P_0' = P_0'' = P_0''' = 0 - \frac{\omega^5 \cdot \tau^5}{120} = \frac{1}{24} \cdot \omega^4 \cdot t_\kappa^4 + \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot t_\kappa^2, \quad (19)$$

де для знаходження t_κ слід розв'язати біквадратне рівняння для t_κ-невідомого. Його дійсний розвязок має вигляд:

$$t_\kappa = \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{-6 + \sqrt{36 + 1/5 \cdot \omega^5 \cdot \tau^5}}\ . \quad (20)$$

Формули (16)–(20) можна використати у задачах прецезійного позиціонування будівельної (робото-) техніки, коли до траєкторії руху робочого органу пред'являються високі вимоги щодо точності руху. Крім того, ці результати можуть бути використані для розв'язку задач позиціонування мікроробототехніки.

ВИСНОВКИ

1. У межах одномасової моделі з одним ступенем вільності руху встановлені умови, які накладаються на кінематичні та силові параметри механічної системи (робочих органів будівельної (робото-) техніки), що суттєво вдосконалюють якість руху (зникають небажані коливання системи) та його точність. При цьому для розв'язку задач позиціонування використана часова сплайн-апроксимація вказаних параметрів системи.
2. Отримані у роботі результати можуть у подальшому бути використані для уточнення та вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку траєкторії руху робочих органів будівельної (робото-) техніки та мікроробототехніки як на стадіях проектування/конструювання, так і у режимах їх реальної експлуатації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Норенков И. П. Введение в автоматизированное проектирование технических систем. / И. П. Норенков. – М. : Высшая школа, 1980. – 432 с.*
2. *Ордынцев В. М. Математическое описание объектов автоматизации. / В. М. Ордынцев. – М. : Машиностроение, 1965. – 360 с.*
3. *Смехов А. А. Оптимальное управление подъёмно-транспортными машинами. / А. А. Смехов, Н. И. Ерофеев. – М. : Машиностроение, 1975. – 423 с.*
4. *Шеффлер М. Грузоподъёмные краны. В 2-х т. / М. Шеффлер, Х. Дрессиг, Ф. Курт. – М. : Машиностроение, 1981. – 287 с.*
5. *Брауде В. И. Системные методы расчёта грузоподъёмных машин. / В. И. Брауде, М. С. Тер-Мхитаров. – Л. : Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1985. – 181 с.*
6. *Безухов Н. И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. / Н. И. Безухов, О. В. Лужин, Н. В. Колкунов. – М. : Высшая школа, 1987. – 264 с.*

Стаття надійшла до редакції 20.03.2014 р.